DEVOIR I POUR LE 17 OCTOBRE

Les statistiques d'ordre $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq X_{n:n}$ d'un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ d'observations indépendantes identiquement distribuées sont formées par le réarrangement croissant (convention) de l'échantillon. Quand n est clair d'après le contexte on peut les noter $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$.

Exercice 1 Vérifier que la loi jointe des statistiques d'ordre est absolument continue par rapport à la loi de l'échantillon.

Exercice 2 On suppose que X est une variable aléatoire réelle, absolument continue de densité continue. Montrer que l'échantillon est presque sûrement formé de valeurs deux à deux distinctes. Donner la densité de la loi jointe des statistiques d'ordre.

Exercice 3 Mêmes hypothèses que la question précédente.

Chaque échantillon définit une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ qui trie l'échantillon, cette permutation R associe à chaque position son rang :

$$R(i) = |\{j : 1 \leq j \leq n, X_j \leq X_i\}| \quad \text{pour} \quad i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Quelle est la loi conditionnelle de la permutation R par rapport à la tribu engendrée par les statistiques d'ordre ?

Peut-on dire que les statistiques d'ordre forment une statistique exhaustive ?

Solution 1. *(Questions 1-2-3) On note f la densité de la loi des X_i. Pour vérifier que les points d'un n-échantillon obtenu par tirages i.i.d. selon une loi absolument continue sont distincts, il suffit d'invoquer le théorème de Tonnelli-Fubini.*

Pour tout $z \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{z=u}\, f(u) \mathrm{d}u = 0\,.$$

Pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_i = X_j\} &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x_i) f(x_j) \mathbb{I}_{x_i = x_j} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x_i) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_j) \mathbb{I}_{x_i = x_j} f(x_j) \mathrm{d}x_j \right) \mathrm{d}x_i \qquad \textit{Tonnelli} \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x_i) \times 0 \,\mathrm{d}x_i \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Une borne d'union permet de conclure :

$$\mathbb{P}\{\exists i \neq j, X_i = X_j\} \leq \sum_{i \neq j} \mathbb{P}\{X_i = X_j\} = 0\,.$$

La σ-algèbre engendrée par les statistiques d'ordre est formée des événements invariants par permutation de $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Soit A un événement de cette σ-algèbre. Pour toute permutation π de $1, \ldots, n$, on a

$$\mathbb{P}\{(X_1, \ldots, X_n) \in A\} = \mathbb{P}\left\{(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)}) \in A\right\}$$

L'événement

$$\{(X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}) \in A \textit{ et } X_{i:n} \neq X_{i+1:n} \textit{ pour } i < n\}$$

est la réunion de $n!$ événements disjoints

$$\left\{(X_{\pi(1)},\ldots,X_{\pi(n)})\in A \text{ et } X_{\pi(i)}<X_{\pi(i+1)} \text{ pour } i<n\right\}$$

pour $\pi\in\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $1,\ldots,n$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{(X_{1:n},\ldots,X_{n:n})\in A\right\} &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n}\mathbb{P}\left\{(X_{\pi(1)},\ldots,X_{\pi(n)})\in A \text{ et } X_{\pi(i)}<X_{\pi(i+1)} \text{ pour } i<n\right\}\\ &= n!\,\mathbb{P}\left\{(X_1,\ldots,X_n)\in A \text{ et } X_1<X_{i+1} \text{ pour } i<n\right\}\end{aligned}$$

Si on note g la densité de la loi des statistiques d'ordre par rapport à la loi de $(X_1,\ldots,X_n)$, la densité de la loi des statistiques d'ordre par rapport à la loi de l'échantillon est :

$$g(x_1,\ldots,x_n)=n!\mathbb{I}_{x_1<\ldots<x_n}$$

et la densité de la loi jointe des statistiques d'ordre par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$n!\,\mathbb{I}_{x_1<\ldots<x_n}\prod_{i=1}^n f(x_i)\,.$$

Il n'est pas nécessaire que la loi des X_i soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il suffit qu'elle soit diffuse.

Les statistiques d'ordre définissent la mesure empirique et réciproquement.

Lorsqu'on écrit que les statistiques d'ordre forment une statistique exhaustive, on oublie qu'une statistique est exhaustive par rapport à un modèle. Ici on peut choisir comme modèle l'ensemble des lois possédant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Dans ces conditions, on dira qu'une statistique S est exhaustive par rapport au modèle, si la loi de probabilité conditionnelle de l'échantillon relativement à la statistique S ne dépend pas de la loi P choisie dans le modèle. Sachant les statistiques d'ordre, presque surement, l'échantillon est complètement défini par la donnée de la permutation qui trie l'échantillon.

Exercice 4 Si la loi des X_i, définie par sa fonction de répartition F, admet une densité f, quelle est la densité de la loi de $X_{k:n}$ pour $1\leq k\leq n$?

Solution 2. *(Question 4) L'événement $\{X_{k:n}\leq x\}$ est la réunion disjointe de $n-k+1$ événements*

$$\left\{F_n(x)=\frac{i}{n}\right\}\qquad \text{pour}\qquad i\in k,\ldots,n\,.$$

La fonction de répartition de la loi de $X_{k:n}$ est

$$\sum_{i=k}^n\binom{n}{i}F(x)^i(1-F(x))^{n-i}\,.$$

En dérivant, cette fonction de répartition, en repérant une somme télescopique, on aboutit à :

$$\binom{n}{k}kf(x)F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k}\,.$$

Exercice 5 Si la loi des X_i, définie par sa fonction de répartition F, admet une densité f, calculer la la densité de la loi jointe des $(X_{i:n})_{i\neq k}$ sachant $X_{k:n}$.

Solution 3. *(Question 5) Il suffit de diviser la densité jointe par la densité marginale. Sachant $X_{k:n}=x$, la densité en $x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n$:*

$$\left((k-1)!\prod_{j=1}^{k-1}\frac{f(x_j)}{F(x)}\mathbb{I}_{x_1<\ldots<x_{k-1}<x}\right)\times\left((n-k)!\prod_{j=k+1}^{n}\frac{f(x_j)}{1-F(x)}\mathbb{I}_{x<x_{k+1}<\ldots<x_n}\right)\mathbb{I}$$

Le fait que la densité se factorise en une expression qui dépend de $x_1,\ldots,x_{k-1}$ et une autre qui dépend de $x_{k+1},\ldots,x_n$ montre que conditionnellement à $X_{k:n}$, les $k-1$ plus petites statistiques d'ordre sont indépendantes des $n-k$ plus grandes.

On appelle cela la propriété markovienne des statistiques d'ordre.

Exercice 6 Montrer que conditionnellement à $X_{k:n} = x$, la suite

$$(X_{i:n} - X_{k:n})_{i=k+1,\dots,n}$$

est distribuée comme les statistiques d'ordre d'un $n-k$ échantillon de la loi d'excès au dessus de x (fonction de survie $\overline{F}(x+\cdot)/\overline{F}(x)$) avec la convention $\overline{F} = 1 - F$).

Solution 4. *(Question 6) Voir réponse à la question précédente. Et noter que, conditionnellement à l'événement $\{X > x\}$, la densité de la loi de X en y est*

$$\frac{\mathbb{I}_{y>x}\, f(y)}{1 - F(x)} \,.$$

Exercice 7 Si $X_1, \dots, X_n$ est un échantillon i.i.d. de la loi exponentielle d'espérance 1 (densité $\mathbb{I}_{x>0}\mathrm{e}^{-x}$), et $X_{n:n} \geq X_{n-1:n} \geq \dots \geq X_{1:n}$ les statistiques d'ordre associées, montrer que :

- avec la convention $X_{0:n} = 0$, les écarts $(X_{i:n} - X_{i-1:n})_{1\leq i \leq n}$ (*spacings*) forment une collection de variables aléatoires indépendantes ;
- $X_{i:n} - X_{i-1:n}$ est distribuée selon une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{n+1-i}$.

Solution 5. *(Question 7) On convient de $X_{0:n} = 0$ et $Y_i = X_{i:n} - X_{i-1:n}$ pour $i = 1, \dots, n$.*

La densité jointe de la loi des statistiques d'ordre d'un n échantillon exponentiel est

$$n! \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-x_i} \mathbb{I}_{0<x_1<\dots<x_n}$$

La densité jointe de la loi des espacements est

$$\prod_{i=1}^{n} \Big((n+1-i)\mathrm{e}^{-(n+1-i)y_i} \mathbb{I}_{y_i>0} \Big)$$

Le fait que cette densité jointe soit un produit de densités de lois exponentielles nous indique que les espacements d'un échantillon de la loi exponentielle forment une famille de variables aléatoires indépendantes.

Les statistiques d'ordres sont les sommes partielles de la suite des espacements :

$$X_{k:n} = \sum_{j=1}^{k} Y_j \,.$$

Cette observation permet de deviner et de vérifier le comportement limite de

$$X_{k_n:n} - \mathbb{E}X_{k_n:n}$$

lorsque $n \to \infty$ avec $k_n/n \to \alpha \in (0, 1]$ avec $\lim_n n - k_n = \infty$ (statistiques d'ordre central ou intermédiaire).

Exercice 8 Dans cet exercice, $X_1, \dots, X_n$ est un échantillon i.i.d. de la loi exponentielle d'espérance 1 (densité $\mathbb{I}_{x>0}\mathrm{e}^{-x}$), $X_{n:n} \geq X_{n-1:n} \geq \dots \geq X_{1:n}$ sont les statistiques d'ordre associées.

Montrer que $(X_{n:n} - \mathbb{E}X_{n:n})_n$ converge en loi vers une distribution non-dégénérée.

Calculer la fonction de répartition, l'espérance et la variance de la loi limite.

Solution 6. *(Question 8) Le fait que les espacements forment une famille de variables aléatoires indépendantes permet de calculer rapidement l'espérance et la variance de $X_{n:n}$.*

$$\mathbb{E}X_{n:n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n$$

$$\mathrm{var}(X_{n:n}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \,.$$

En se donnant une suite infinie de variables exponentielles standards indépendantes $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, on note que les sommes partielles recentrées

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i - 1}{i}$$

sont distribuées comme les variables $X_{n:n}$ recentrées mais vivent dans le même espace probabilisé. On note que

$$\mathbb{E}[(Z_{n+p} - Z_n)^2] = \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{1}{i^2} \leq \frac{1}{n}\,.$$

Ceci implique que la suite $(Z_n)_n$ est une suite de Cauchy dans L_2 qui est un espace complet. Cette suite possède une limite (de carré intégrable). La convergence dans L_2 implique la convergence en loi. La suite $(X_{n:n} - H_n)_n$ hérite de cette convergence en loi. Elle hérite aussi de la convergence de la variance vers $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i^2 = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour caractériser la loi limite, on note

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_{n:n} - \log n \leq x\} &= \left(1 - \mathrm{e}^{-x - \log n}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n\end{aligned}$$

qui tend vers $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ lorsque n tend vers l'infini. Cette limite est une fonction de répartition, elle caractérise la loi de Gumbel.

Comme $H_n - \log n \to \gamma \approx .577...$ la constante d'Euler Mascheroni, on peut conclure que $X_{n:n} - H_n$ converge en loi vers la loi de Gumbel translatée de $-\gamma$ (variance $\pi^2/6$) de fonction de répartition

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x-\gamma}}\,.$$

Exercice 9 Memes hypothèses que dans l'exercice précédent. En plus, $(k_n)_n$ est une suite croissante d'entiers qui tend vers l'infini, telle que k_n/n tende vers une limite finie $p \in (0, 1)$ ou même $\lim_n k_n/n = 1$ avec $n - k_n$ qui tend vers l'infini suffisamment vite.

Montrer que $\frac{X_{k_n:n} - \mathbb{E}X_{k_n:n}}{\sqrt{\mathrm{var}(X_{k_n:n})}}$ converge en loi vers une Gaussienne centrée réduite.

Suggestion : pensez à utiliser la version Lindeberg-Feller du TCL.

Solution 7. *(Question 9) Si on tire parti du fait que les statistiques d'ordre d'un échantillon exponentiel sont distribuées comme des sommes de variables aléatoires indépendantes, il est suffisant de vérifier les conditions d'applications du théorème central limite dans la version Lindeberg-Feller.*

Théorème 1. [TLC LINDEBERG-FELLER] *Soit $(Y_{i,n})_{i \leq n < \infty}$ un tableau triangulaire de variables aléatoires centrées de variances finies, telles que*

1. *pour chaque n $(Y_{i,n})_{i \leq n}$ forme une famille indépendante,*
2. *Pour tout $\epsilon > 0$, (en notant $\sigma_n^2 = \sum_{i \leq n} \mathbb{E}Y_{i,n}^2$),*

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i \leq n} \mathbb{E}\left[Y_{i,n}^2 \mathbb{I}_{|Y_{i,n}| > \epsilon \sigma_n}\right] \longrightarrow_{n \to \infty} 0$$

alors

$$\frac{1}{\sigma_n} \left(\sum_{i \leq n} Y_{i,n}\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)\,.$$

□

Pour une suite centrale ou intermédiaire $(k_n)_n$ $(n - k_n \to \infty$ et $k_n/n \to p \in (0, 1])$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{k_n:n}] &= \sum_{i=n-k_n+1}^{n} \frac{1}{i} = H_n - H_{n-k_n} \sim -\log\left(1 - \frac{k_n}{n}\right) \\ \mathrm{Var}(X_{k_n:n}) &= \sum_{i=n-k_n+1}^{n} \frac{1}{i^2}\end{aligned}$$

so that

$$\frac{k_n}{(n+1)(n-k_n+1)} \leq \operatorname{Var}(X_{k_n:n}) \leq \frac{k_n}{n(n-k_n)}\,.$$

Avec la convention $\lim_n \frac{k_n}{n} = p \in (0,1]$ *et* $\lim_n n - k_n = \infty$, $\operatorname{Var}(X_{k_n:n}) \sim \frac{p}{n-k_n}$, *et* $\lim_n \operatorname{Var}(X_{k_n:n}) = 0$.

Pour $\lambda, \mu, \epsilon > 0$ *tels que* $\lambda\mu\epsilon > 1$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \mathbb{I}_{|x-1/\lambda|>\epsilon\mu} \mathrm{d}x \\
&\qquad = \frac{\mathrm{e}^{-1-\lambda\mu\epsilon}}{\lambda^2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}(u+\lambda\mu\epsilon)^2 \mathrm{d}u \\
&\qquad \leq \frac{\mathrm{e}^{-1-\lambda\mu\epsilon}}{\lambda^2}(4 + 2\lambda^2\mu^2\epsilon^2)\,.
\end{aligned}$$

Pour $i : 0 \leq i \leq k_n < n$ *avec* n *assez grand pour que* $\epsilon/\sigma_n\epsilon\sqrt{n-k_n} > 1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\big(X_{i+1:n} - X_{i:n} - \frac{1}{n-i}\big)^2 \mathbb{I}_{|X_{i+1:n}-X_{i:n}-1/(n-i)|>\epsilon\sigma_n}\Big] \\
&\qquad\qquad \leq e^{-1-(n-i)\epsilon\sigma_n}\left(\frac{4}{(n-i)^2} + 2\epsilon^2\sigma_n^2)\right)\,.
\end{aligned}$$

Si n *est assez grand* $\frac{1}{2} \leq \frac{k_n}{n} \leq 2$, $\epsilon\sigma_n \leq 1$, $1 - \mathrm{e}^{-\epsilon\sigma_n} \geq \epsilon\sigma_n/\mathrm{e}$. *En sommant sur* $0 \leq i < k_n$, *Si* n *est assez grand* $p/2 \leq \frac{k_n}{n} \leq p2$, $\epsilon\sigma_n \leq 1$, $1 - \mathrm{e}^{-\epsilon\sigma_n} \geq \epsilon\sigma_n/\mathrm{e}$. *En sommant sur* $0 \leq i < k_n$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k_n-1} \frac{1}{\sigma_n^2}\mathrm{e}^{-(n-i)\epsilon\sigma_n}\left(\frac{4}{(n-i)^2} + 2\epsilon^2\sigma_n^2\right) \\
&\quad \leq \frac{4\mathrm{e}^{-\epsilon\sqrt{\frac{k_n(n-k_n-1)}{n+1}}}}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{k_n-1}\frac{1}{(n-i)^2} + 2\epsilon^2\sum_{i=0}^{k_n-1}\mathrm{e}^{-(n-i)\epsilon\sigma_n} \\
&\quad \leq \frac{4\mathrm{e}^{-\epsilon\sqrt{\frac{k_n(n-k_n-1)}{n+1}}}}{\sigma_n^2(n-k_n)} + 2\epsilon^2\frac{\mathrm{e}^{-(n-k_n+1)\epsilon\sigma_n}}{1-\mathrm{e}^{-\epsilon\sigma_n}} \\
&\quad \leq 4\mathrm{e}^{-\epsilon\sqrt{\frac{k_n(n-k_n-1)}{n+1}}}\frac{(n+1)(n-k_n+1)}{k_n(n-k_n)} + 2\epsilon^2\frac{\mathrm{e}^{-\epsilon\sqrt{\frac{k_n(n-k_n-1)}{n+1}}}}{1-\mathrm{e}^{-\epsilon\sigma_n}} \\
&\quad \leq \mathrm{e}^{-\epsilon\sqrt{\frac{p(n-k_n-1)}{2}}}\frac{16}{p} + 4\epsilon(n-k_n+1)\frac{\mathrm{e}^{1-\epsilon\sqrt{\frac{p(n-k_n-1)}{2}}}}{p}\,.
\end{aligned}$$

Le membre droit tend vers 0 *pour tout* $\epsilon > 0$, *dès que* $\lim_n n - k_n = +\infty$.

Exercice 10 Si f est une fonction croissante sur $[a,b]$, on définit son inverse généralisée $f^{\leftarrow}$ par

$$f^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : x \in [a,b],\ f(x) \geq y\} \qquad \text{pour } y \in [f(a), f(b)]\,.$$

Montrer que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions croissantes sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ qui converge *simplement* vers f une autre fonction croissante sur $[a,b]$ en tout point de continuité de f, alors la suite $(f_n^{\leftarrow}(y))$ converge simplement vers $f^{\leftarrow}(y)$ en tout $y \in [f(a), f(b)]$ où $f^{\leftarrow}$ est continue.

Solution 8. *(Question 10)*

Théorème 2. (Continuité de l'inversion (généralisée).) *Si* $(f_n)_n$ *est une suite de fonctions croissantes sur* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *qui converge* simplement *vers* f *une autre fonction croissante sur* $[a,b]$ *en tout point de continuité de* f, *alors la suite* $(f_n^{\leftarrow}(y))$ *converge simplement vers* $f^{\leftarrow}(y)$ *en tout* $y \in [f(a), f(b)]$ *où* $f^{\leftarrow}$ *est continue.*

On utilise le résultat suivant, élémentaire et classique.

Théorème 3. *Si* f *est croissante sur* $[a,b]$ *alors* f *possède au plus une infinité dénombrable de points de discontinuité.*

Preuve de (Théorème 3.) Comme $f(b) - f(a) < \infty$, pour tout $n > 0$, f possède un nombre fini de sauts d'amplitude supérieure à $1/n$. Une réunion dénombrable d'ensembles finis est dénombrable.

Preuve de (Théorème 2) Soit $y \in (f^{\leftarrow}(a), f^{\leftarrow}(b))$ un point de continuité de $f^{\leftarrow}$. Cela signifie que f est strictement croissante en $f^{\leftarrow}(y)$.

Fixons $\epsilon > 0$. On veut vérifier que pour n assez grand

$$f^{\leftarrow}(y) - \epsilon \leq f_n^{\leftarrow}(y) \leq f^{\leftarrow}(y) + \epsilon.$$

On procède de manière similaire pour établir les deux inégalités. Ici on établit l'inégalité de droite.

La densité des points de continuité de f implique qu'on peut trouver $\epsilon_1 \colon \epsilon_1 < \epsilon$ tel que $f^{\leftarrow}(y) + \epsilon_1$ est un point de continuité de f.

La suite $f_n(f^{\leftarrow}(y) + \epsilon_1)$ converge vers $f(f^{\leftarrow}(y) + \epsilon_1)$. D'où $\limsup_n f(f_n^{\leftarrow}(y)) \leq f(f^{\leftarrow}(y) + \epsilon_1)$.

Comme $f(f^{\leftarrow}(y)) < f(f^{\leftarrow}(y) + \epsilon_1) \leq f(f^{\leftarrow}(y) + \epsilon)$, puisque f est strictement croissante en $f^{\leftarrow}(y)$, on peut conclure que $\limsup_n f_n^{\leftarrow}(y) \leq f^{\leftarrow}(y) + \epsilon$.

Exercice 11 Soit F une fonction de répartition, on définit la fonction quantile associée $F^{\leftarrow}$ par

$$F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\} \qquad \text{pour } p \in]0,1[\,.$$

1. Vérifier que si deux fonctions de répartitions ont même fonction quantile alors elles sont égales.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, p \in]0,1[$,
   (a) $F^{\leftarrow}(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F(x)$.
   (b) $F \circ F^{\leftarrow}(p) \geq p$ avec égalité si et seulement si il existe x tel que $F(x) = p$.
   Si $F \circ F^{\leftarrow}(p) > p$ alors $F^{\leftarrow}$ est discontinue en p.
   (c) $F^{\leftarrow} \circ F(x) \leq x$.
   Si $F^{\leftarrow} \circ F(x) < x$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $F(x - \epsilon) = F(x)$.
   (d) $(F \circ G)^{\leftarrow} = G^{\leftarrow} \circ F^{\leftarrow}$
3. Comment la convergence en distribution se traduit elle sur les fonctions quantiles ?

Solution 9. *(Question 11)*

1. *Si F est une fonction de répartition, $(F^{\leftarrow})^{\leftarrow}$ est la version continue à gauche de F. Elle détermine complètement F.*

   Corollaire : la fonction quantile caractérise la loi (comme la fonction de répartition).
2. *La première assertion est une conséquence immédiate de la définition de $F^{\leftarrow}$.*

   Soit (x_n) une suite qui décroit vers $F^{\leftarrow}(p)$ telle que $F(x_n) \geq p$, par continuité à droite de F, $F(x_n)$ décroit vers $F \circ F^{\leftarrow}(p)$ et donc $F \circ F^{\leftarrow}(p) \geq p$.

   Soit $(p_n)_n$ une suite qui croit vers $F(x)$ (on a donc pour chaque n, $F^{\leftarrow}(p_n) \leq x$), par continuité à gauche de $F^{\leftarrow}$, $F^{\leftarrow}(p_n) \to F^{\leftarrow} \circ F(x)$.
3. *D'après la réponse à la question précédente, non seulement la fonction quantile caractérise une loi de probabilité, mais la convergence simple des fonctions quantiles permet de caractériser la convergence faible.*

   Corollaire 1. *Une suite de fonctions quantiles $(F_n^{\leftarrow})$ converge simplement vers une fonction quantile $F^{\leftarrow}$ en tout point de continuité de cette dernière si et seulement si la suite des lois de probabilité associées (P_n) converge faiblement vers la loi P déterminée par $F^{\leftarrow}$.*

Autre corollaire important, si U est uniformément distribuée sur $[0,1]$, alors $F^{\leftarrow}(U)$ est distribuée selon la loi définie par F.

Exercice 12 Si $Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \ldots \leq Y_{n:n}$ forment les statistiques d'ordre d'un n-échantillon de la loi exponentielle d'espérance 1, et si $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$ désignent les statistiques d'ordre d'un n-échantillon d'une loi de fonction de répartition F qui admet une densité partout positive, montrer que

$$(X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}) \sim (F^{\leftarrow}(1 - \exp(-Y_{1:n})), \ldots, F^{\leftarrow}(1 - \exp(-Y_{n:n}))) \,.$$

Solution 10. *(Question 12) Si Y est distribuée selon la loi exponentielle d'espérance 1, pour $x \in (0,1)$, $1-\exp(-Y)$ vérifie :*

$$\mathbb{P}\left\{1-\mathrm{e}^{-Y} \leq x\right\} = \mathbb{P}\left\{Y \leq -\log(1-x)\right\} = 1-\mathrm{e}^{\log(1-x)} = x\,.$$

Par monotonie, le vecteur aléatoire $(1-\exp(-Y_{1:n}),\ldots,1-\exp(-Y_{n:n}))$ est distribué comme les statistiques d'ordre d'un n-échantillon de la loi uniforme sur $[0,1]$.

La résultat recherché découle de l'observation : si U est uniformément distribuée sur $[0,1]$ alors $F^{\leftarrow}(U)$ est distribuée selon la loi de fonction de répartition F.

Cette identité en distribution s'appelle la représentation de Rényi.

Exercice 13 La fonction quantile empirique $F_n^{\leftarrow}$ est la fonction quantile associée à la fonction de répartition empirique F_n. Si les points de l'échantillon sont deux à deux distincts, on a

$$F_n^{\leftarrow}(p) = X_{k:n} \qquad \text{pour } \frac{k-1}{n} < p \leq \frac{k}{n}\,.$$

Soit F une fonction de répartition qui est dérivable en $F^{\leftarrow}(p)$ de dérivée non nulle notée $f(p)$ pour une valeur $p \in]0,1[$. Montrer que

$$\sqrt{n}\left(F_n^{\leftarrow}(p) - F^{\leftarrow}(p)\right) + \sqrt{n}\frac{1}{f(p)}\left(F_n(F^{\leftarrow}(p)) - p\right) = o_P(1)\,.$$

Quelle est la loi limite de $\sqrt{n}\left(F_n^{\leftarrow}(p) - F^{\leftarrow}(p)\right)$?

Solution 11. *(Question 13) On peut répondre directement à la dernière question. Nous avons établi en réponse à la question que pour l'échantillon exponentiel*

$$\sqrt{n}\left(F_n^{\leftarrow}(p) - F^{\leftarrow}(p)\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{p}{1-p}\right)\,.$$

En combinant la représentation de Rényi et la méthode delta, on obtient pour le cas général des lois possédant une densité positive en $F^{\leftarrow}(p)$:

$$\sqrt{n}\left(F_n^{\leftarrow}(p) - F^{\leftarrow}(p)\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{f(F^{\leftarrow}(p))^2}\right)\,.$$

La première partie de la question porte sur un résultat plus fort qui fait partie de ce qu'on appelle l'approximation de Bahadur-Kiefer.