

DEVOIR 3 POUR LE 6 JANVIER 2017

ON PEUT SUPPOSER ACQUIS LE RÉSULTAT D'UN EXERCICE QUAND ON ABORDE UN AUTRE EXERCICE.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

i) Pour un vecteur x de \mathbb{R}^p , on note

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^p |x_i| \quad \|x\|_0 := \sum_{i=1}^p \mathbb{I}_{x_i \neq 0} \quad \|x\| := \left(\sum_{i=1}^p x_i^2 \right)^{1/2}.$$

ii) Pour $0 \leq s \leq p$,

$$\Theta_s := \{x : x \in \mathbb{R}^p, \|x\|_0 \leq s\},$$

c'est l'ensemble des vecteurs à au plus s coordonnées non-nulles.

iii) On se propose de reconstruire un signal inconnu $\theta \in \Theta_s$ à partir de $(\langle x_i, \theta \rangle)_{i \leq N}$ où les x_i sont des vecteurs de détection (à valeur dans \mathbb{R}^p). On note y le vecteur dont les coordonnées sont les $\langle x_i, \theta \rangle$.

On note A la matrice $N \times p$ dont les lignes sont les (x_i^t) ($A_{i,j} := x_i(j)$). La matrice A est appelée *matrice de détection*.

iv) Une fonction de $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une ϵ -isométrie sur $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^p$ si pour tous a, a' de \mathcal{T}

$$(1 - \epsilon) \leq \frac{\|f(a) - f(a')\|^2}{\|a' - a\|^2} \leq (1 + \epsilon)$$

autrement dit si f préserve les distances mutuelles à l'intérieur de \mathcal{T} .

v) L'intersection de la sphère unité en dimension p et de Θ_s sera notée A_s^p .

OBJECTIFS

On s'intéresse à la reconstruction de θ à partir de $y \in \mathbb{R}^N$ défini par

$$y := A\theta.$$

Nous allons d'abord donner des conditions suffisantes sur la matrice de détection A pour garantir la possibilité de reconstruire $\theta \in \Theta_s$ à partir de θ .

CONDITIONS POUR LA RECONSTRUCTION DE $\theta \in \Theta_s$

Le but du premier exercice est de vérifier quand la méthode de reconstruction

$$\arg \min \|z\|_1 \quad \text{sous la contrainte } Az = y \quad (\text{MÉTHODE BP})$$

reconstruit θ .

On utilisera la condition suivante sur la matrice de détection.

Condition NSP : pour tout $S \subset [p] := \{1, \dots, p\}$ avec $|S| \leq s$, pour tout $z \neq 0$ vérifiant $Az = 0$,

$$\|z_S\|_1 < \|z_{\bar{S}}\|_1$$

avec la convention que z_S (resp $z_{\bar{S}}$) est obtenu à partir de z en annulant tous les coefficients z_i qui ne sont pas dans S (resp. qui sont dans S).

Exercice 1

Montrer que si la condition NSP est vérifiée par A , la méthode BP reconstruit θ vérifiant $\|\theta\|_0 \leq s$ à partir de θ vérifiant $y = A\theta$.

Exercice 2

Etablir la réciproque de la propriété précédente.

Exercice 3

Vérifier que si pour $\epsilon > 0$, la matrice A définit une ϵ -isométrie pour Θ_{2s} , alors la reconstruction de tout $\theta \in \Theta_s$ à partir de $y = A\theta$ est possible : il existe une unique solution dans Θ_s à l'équation en θ' $A\theta' = A\theta$.

Exercice 4

Montrer que si A définit une $1/3$ -isométrie pour Θ_{2s} , on peut reconstruire $\theta \in \Theta_s$ par la méthode BP.

Suggestion : Montrer que dans ce cas, la propriété NS est vérifiée.

CONSTRUCTION RANDOMISÉE DE MATRICES DE DÉTECTION

Exercice 5

Dans cet exercice et dans la suite W envoie \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^N , $W : \alpha \mapsto \frac{1}{\sqrt{N}} (\langle X_1, \alpha \rangle, \dots, \langle X_N, \alpha \rangle)^t$. Les vecteurs aléatoires X_1, \dots, X_N sont i.i.d. $\mathcal{N}(0, \text{Id}_p)$.

- i) Loi, espérance, variance de $\|W(\alpha)\|^2 / \|\alpha\|^2$ (pour tout α non nul de \mathbb{R}^p) ?
- ii) Majorer la variance de $\|W(\alpha)\| / \|\alpha\|$.
- iii) Majorer la variance de $\sup_{\alpha \in \Theta_s} \|W(\alpha)\| / \|\alpha\|$.

L'objectif de l'exercice suivant est de vérifier que si \mathcal{T} est fini, si N est assez grand, avec forte probabilité, W définit une ϵ -isométrie pour \mathcal{T} .

Exercice 6

Montrer l'existence d'une constante κ_1 telle que si \mathcal{T} est fini, pour tout $\epsilon, \delta \in]0, 1[$, si

$$N \geq \frac{\kappa_1}{\epsilon^2} \log \frac{2|\mathcal{T}|}{\delta}$$

alors avec probabilité supérieure à $1 - \delta$, W est une ϵ -isométrie.

Suggestion : n'hésitez pas à utiliser les inégalités de concentration gaussiennes et les bornes de Bonferroni (union bound).

Exercice 7

Dans un espace métrique (E, d) , on dit qu'un ensemble $G \subseteq E$ est ϵ -séparé si deux points distincts de G sont à distance supérieure ou égale à ϵ . Si $F \subseteq E$, on note $H(\epsilon, F)$ la cardinalité maximale d'un sous-ensemble ϵ -séparé de F .

Montrer que si B^d désigne la boule unité dans \mathbb{R}^d

$$H(\epsilon, B^d) \leq d \log \left(1 + \frac{2}{\epsilon} \right).$$

Suggestion : utiliser un argument de volume.

Pour la suite, on admettra que pour tout $\epsilon < 1/2$, il existe un ensemble \mathcal{T}_ϵ de points de A_{2s}^p , tel que

$$\log |\mathcal{T}_\epsilon| \leq 2s \log \left(\kappa_2 \frac{p}{2s\epsilon} \right)$$

tel que tout

$$\forall \alpha \in A_p^{2s}, \exists \beta \in \mathcal{T}_\epsilon, \|\alpha - \beta\| \leq \epsilon \text{ et } (\alpha - \beta) \in \Theta_{2s}.$$

On notera $\Pi_\epsilon(\alpha)$ un voisin b de $\alpha \in A_{2s}^p$ dans \mathcal{T}_ϵ tel que $\|\alpha - \beta\| \leq \epsilon$ et $(\alpha - \beta) \in \Theta_s$.

On note

$$U := \sup \{ \|W(\alpha)\|^2 - 1 : \alpha \in A_{2s}^p \} \quad V := \sup \{ 1 - \|W(\alpha)\|^2 : \alpha \in A_{2s}^p \}$$

On vérifie immédiatement que si U et V sont inférieurs à ϵ alors la matrice de détection définie par les $(X_i)_{i \leq N}$ est une ϵ -isométrie pour Θ_{2s} .

On note $\mathcal{D}_\epsilon \subseteq \Theta_{2s}$, l'ensemble défini par

$$\mathcal{D}_\epsilon := \{ x - \Pi_\epsilon(x) : x \in A_{2s}^p \}.$$

Exercice 8

Dans cet exercice $\epsilon \in]0, 1/2[$. Montrer que pour tout $\eta > 0$

$$U \leq (1 + \eta) \left(\sup_{\alpha \in \mathcal{T}_\epsilon} \|W(\alpha)\|^2 - 1 \right) + \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \epsilon^2 U + \eta.$$

Suggestion : ne pas oublier $(x + y)^2 \leq (1 + \beta)x^2 + (1 + 1/\beta)y^2$ pour tout $\beta > 0$.

Montrer que si $\sup_{\alpha \in \mathcal{T}_\epsilon} \|W(\alpha)\|^2 - 1 \leq \epsilon$, en choisissant bien η , on peut garantir

$$U \leq 16\epsilon.$$

Montrer de façon analogue que si $\sup_{\alpha \in \mathcal{T}_\epsilon} 1 - \|W(\alpha)\|^2 \leq \epsilon$, alors

$$V \leq 16\epsilon.$$

Exercice 9

En combinant les résultats précédents, montrer que si la solution ϵ_* de l'équation

$$N\epsilon^2 = 16^2 \kappa_1 \left(2s \log \left(\kappa_2 \frac{16p}{2s\epsilon} \right) + \log \frac{2}{\delta} \right)$$

est inférieure à $1/2$, alors avec une probabilité supérieure à $1 - \delta$, W définit une ϵ_* -isométrie sur Θ_s .

MORALITÉ : LE HASARD FAIT BIEN LES CHOSES.